MAI 1 - nekonečné posloupnosti - další příklady.

1. Vypočítejte následující limity (nebo ukažte, že neexistují):

a) $\lim\limits_{n\to\infty} \dfrac{1+2+....+n}{n^2}$; b) $\lim\limits_{n\to\infty} \dfrac{1^2+2^2+....+n^2}{n^3}$; c) $\lim\limits_{n\to\infty} \dfrac{\sqrt[3]{n+1}-\sqrt[3]{n-1}}{n}$; d) $\lim\limits_{n\to\infty} \sum\limits_{k=1}^{n} \dfrac{1}{k(k+1)}$.

2. Víte-li, že $\lim\limits_{n\to\infty} \left(1+\dfrac{1}{n}\right)^n = e$, vypočítejte limity

a) $\lim\limits_{n\to\infty} \left(1+\dfrac{1}{n}\right)^{3n}$; b) $\lim\limits_{n\to\infty} \left(1+\dfrac{1}{n^2}\right)^{n}$; c) $\lim\limits_{n\to\infty} \left(1-\dfrac{1}{n}\right)^{n}$; d) $\lim\limits_{n\to\infty} \left(1+\dfrac{1}{n}\right)^{n^2}$.

3. Užití věty o limitě monotónní posloupnosti.

a) Ukažte, že rekurentně definovaná posloupnost $\{ a_n \}$, kde $a_1 = \sqrt{2}$, $a_{n+1} = \sqrt{2+a_n}$ je rostoucí a shora omezená a že $\lim\limits_{n\to\infty} a_n = 2$.

b) Ukažte, že rekurentně definovaná posloupnost $\{ a_n \}$, kde $a_1 = 10$, $a_{n+1} = 6 - \dfrac{5}{a_n}$ je klesající a zdola omezená. Určete její limitu.

c) Definujme rekurentně posloupnost $\{a_n\}$, kde

$$a_1 = 2 \ , \ a_{n+1} = \frac{1}{2}\left(a_n + \frac{2}{a_n}\right)$$. Ukažte, že $\lim\limits_{n\to\infty} a_n = \sqrt{2}$.

d) Ukažte, že platí: je-li $0 \le a_n$, pak posloupnost $\left\{ \sum\limits_{n=1}^{N} a_n \right\}$ konverguje nebo diverguje k $+\infty$.

e) Ukažte, že platí :

Je-li $0 \le a_n \le b_n$, $n \in N$, potom, konverguje-li posloupnost $\left\{ \sum\limits_{n=1}^{N} b_n \right\}$, pak také konverguje posloupnost $\left\{ \sum\limits_{n=1}^{N} a_n \right\}$(tedy, konverguje-li řada $\sum\limits_{n=1}^{\infty} b_n$, konverguje i řada $\sum\limits_{n=1}^{\infty} a_n$).
(srovnávací kriterium konvergence řad)

Pokuste se rozhodnout (užitím tohoto tvrzení) o konvergenci , resp.divergenci, řady :

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{3^n \cdot \sqrt{n}} ; \quad \sum_{n=1}^{\infty} \frac{\sqrt{n}}{2n^2+3} ; \quad \sum_{n=2}^{\infty} \frac{n+1}{n^2-1} ; \quad \sum_{n=1}^{\infty} \frac{\sqrt{n}}{2n-1} ; \quad \sum_{n=1}^{\infty} \left(\frac{3n}{n^2+1}\right)^2 .$$

f) Ukažte, že $\lim\limits_{n\to\infty} \sum\limits_{k=1}^{n} \dfrac{1}{k} = \infty$. (Návod: ukažte, že daná posloupnost není cauchyovská.)

4. Problémky:

Dokažte následující tvrzení:

a) Nechť $\lim\limits_{n\to\infty} a_n = a, a \in R$ a nechť platí $\forall\varepsilon > 0\ \exists n_0 \forall n > n_0 : |a_n - b_n| < \varepsilon$. Potom také $\lim\limits_{n\to\infty} b_n = a$.

b) Nechť posloupnost $\{a_n\}$ je cauchyovská, $\{a_{n_k}\}$ je posloupnost vybraná z $\{a_n\}$ a nechť $\lim\limits_{k\to\infty} a_{n_k} = a$. Potom také $\lim\limits_{n\to\infty} a_n = a$.

c) Je-li $\lim\limits_{n\to\infty} a_n = a, a > 0$, pak je $\lim\limits_{n\to\infty} \sqrt[n]{a_n} = 1$. Zvažte, zda tvrzení platí i pro $a = 0$ $(a_n > 0)$.

5. Ukažte, že $\lim\limits_{n\to\infty} \sqrt[n]{n!} = \infty$.

6. Ještě „aritmetika“ limit:

a) Je-li $\lim\limits_{n\to\infty} a_n = a$, $\lim\limits_{n\to\infty} b_n = b$, co lze říci o $\lim\limits_{n\to\infty} (a_n + b_n)$? Tvrzení dokažte.
Na příkladech ukažte, že nelze formulovat žádné pravidlo pro součet v případě, že $a = \infty$ a $b = -\infty$.
Co lze říci (a co nelze) pro $\lim\limits_{n\to\infty} (a_n . b_n)$?

b) Spočítejte limity:

$$\lim_{n\to\infty} \frac{2^n + n^4}{n^2 + n!} \ ; \quad \lim_{n\to\infty} \frac{3^n + n!}{n^4 + 4(n+1)!} \ ; \quad \lim_{n\to\infty} \frac{3^n + \sin n! + n!}{n^3 + 2n!} \ ; \quad \lim_{n\to\infty} \frac{n^2 + (-1)^n n!}{3n!} \ .$$

7. Ještě cauchyovské posloupnosti:

Ukažte, že neklesající, shora omezená posloupnost je cauchyovská.